Inclusion Relations and Indicial Derivative for von Neumann Subalgebras

河上, 哲

数理解析研究所講究録
第 743 巻 1991 年 141-144

Inclusion Relations and Indicial Derivative for von Neumann Subalgebras

奈良教育大学 河上哲 (Satoshi KAWAKAMI)

von Neumann による作用素環論の創始以来、フォンノイマン環の型の分類に始まり環自身の構造は既にかなり解明されている。他方、Jones の指数理論 ([4]) の出現を契機として、現在、部分環の包含関係について多くの関心が寄せられており、今後、この方面の本格的な発展も期待されている。以上を背景に、本稿では従来の諸概念を包括的に整理してみると伴に、包含関係の型の分類に関する試みと包含関係を記述する新たな指標について報告する。

フォンノイマン環自身の型の分類を行なう有力な武器の1つとしてトレースの概念がある。そこで、部分環の包含関係の型の分類を実行する上では、トレースの一般化に相当する作用素値ウエイト (または条件付期待値) を用いるのが1つの自然な方法 (幸崎氏のアイディア [8]) として考えられる。今までに包含関係を記述する型としては、それぞれ、独自の状況において、指数有限型, エントロピー有限型, 離散型, コンパクト型等が知られている。ここでは、これらの包含関係を含め、一般的な状況のもとでの包含関係の型について、試験的に考察してみる。

環自身の上のウエイト、ステート、トレース、規準化トレースの概念に対応して、それぞれの自然な拡張としては、各々、部分環の上への作用素値ウエイト [3]、条件付期待値、unimodular な作用素値ウエイト、unimodular な条件付期待値、が挙げられる。そこで、フォンノイマン環の組 $M \supset N$ に対し、次の集合を考える。

$P(M,N) = \{$ 正規、忠実、半有限な N-値ウエイト全体 $\}$
$E(M,N) = \{E \in P(M,N); E(1) = 1\}$

$P_1(M,N) = \{E \in P(M,N); \sigma_t^E = id \text{ on } N' \cap M\}$
$E_1(M,N) = E(M,N) \cap P_1(M,N)$

この時、Mに対するNの包含関係$R(M,N)$に関連する性質として、次の可能性が考えられる。

(1) 任意の射影 $e \in N' \cap M$ に対し、$P(M_e, N_e) = \emptyset$。この時、自動的に、$P(N'_e, M'_e) = \emptyset$ となる。

(2) 任意の射影 $e \in Z(N' \cap M)$ に対し、$P_1(M_e, N_e) = \emptyset$。この時、自動的に、$P_1(N'_e, M'_e) = \emptyset$ となる。

(3) $P(M,N) \neq \emptyset$。この時、自動的に、$P(N', M') \neq \emptyset$ となる。

(4) $P_1(M,N) \neq \emptyset$。この時、自動的に、$P_1(N', M') \neq \emptyset$ となる。

(5) $E(M,N) \neq \emptyset$。

(5') $E(N', M') \neq \emptyset$。

(6) $E_1(M,N) \neq \emptyset$。

(6') $E_1(N', M') \neq \emptyset$。

(7) $P_1(M,N) \ni E$ に対し、$E^c = E\,|_{N' \cap M}$ が半有限。

(7') $P_1(N', M') \ni E$ に対し、$E^c = E\,|_{N' \cap M}$ が半有限。

(8) $P_1(M,N) \ni E$ に対し、$E^c = \infty \cdot 1_{N' \cap M}$。

(8') $P_1(N', M') \ni E$ に対し、$E^c = \infty \cdot 1_{N' \cap M}$。

注意　上記の条件 (7),(7'),(8),(8') においては、ある E に対して成立すれば、すべての E に対しても成立する事が、Haagerup の結果 [3] により、確かめられる。

以上の性質 (1) から (8') 迄に関する相互の関連と差異についての詳細な検討及び具体例は、今後の課題として、本稿ではそのうちの若干の試みを報告する。

まず、フォンノイマン環の組 $M \supset N$の包含関係 $R(M,N)$ の型の呼称を当面次の様に定めてみる。この呼称の妥当性については、議論の余地が十分にある。

(a) $E_1(M,N) \ni E$ が存在して、index$E = E^{-1}(1)$ が有界作用素となる時、$R(M,N)$ を指数有限型と呼ぶ。

(b) 有限型フォンノイマン環 M に対しては、$E_1(M) \ni \tau$ が存在して、Pimsner-Popa のエントロピー $H_\tau(M|N)$ が有限の値をとる時、$R(M,N)$ をエントロピー有限型と呼ぶ。一般の M に対しては、$E_1(N' \cap M) \ni \tau$ が存在して、$K_\tau(M \mid N) = \tau(\log I_\tau(M \mid N))$ が有限の時、$R(M,N)$ をエントロピー有限型と呼ぶ。この呼称は、後述を参考にすると、両立している事がわかる。

(c) Herman-Ocneanu [2] の定義の自然な一つの拡張として、条件 (6) が成立する時、$R(M,N)$ を離散型、条件 (6') が成立する時、$R(M,N)$ をコンパクト型と呼ぶ。

(d) 有限型= 離散型かつコンパクト型= 条件 (6) かつ条件 (6')。

(e) 半有限型と呼ぶべき候補は、(イ) 条件 (4)、(ロ) 条件 (7) かつ (7')、(ハ) 条件 (6) または (6')、が挙げられる。

(f) 無限型と呼ぶべき候補は、(1),(2),(8),(8')。

以上の定義の妥当性と自明な相互関係についての説明は省略するとして、ここでは、次の関係を報告する。

(i) 有限型 = 離散型かつ条件 (7') = コンパクト型かつ条件 (7)

(ii) 指数有限型$\Longrightarrow$ エントロピー有限型 $\Longrightarrow$ 有限型

(iii) 包含関係が半有限型 (条件 (e) の (ハ) の意味で) のフォンノイマン環の任意の組 $M \supset N$ に対し、$Z(N' \cap M)$ の射影 e が存在し、$R(M_e, N_e)$: 有限型、$R(M_{1-e}, N_{1-e})$: 無限型 (条件 (8) かつ (8') の意味で) とできる。

他方、指数有限型に対しては「指数」が、エントロピー有限型に対しては「エントロピー」が、包含関係を記述する有効な量である様に、有限型包含関係に対してはそれと両立する有効な指標として、「 indicial derivative 」が自然に考えられる。しかも、これが指数とエントロピーの両者を制御している事を報告する。詳しくは次の通り。

フォンノイマン環の組 $M \supset N$ の包含関係が有限型とする。このとき、$N' \cap M$ は有限型かつ I 型であり、$N' \cap M$ 上の規準化トレース τ と τ を不変にする M から N の上への unimodular な条件付期待値 E に対し、E の Haagerup 対応 E^{-1} と standard 対応 E' を用いて、その indicial derivative $I_\tau^E(M \mid N) = dE^{-1}/dE'$ が $Z(N' \cap M)$ に affiliate する正定値

自己共役作用素として定義される。この時、次の関係が成立する。

(iv) 指数に関しては、index$E = E'(I_\tau^E(M \mid N))$.

(v)$M \supset N$ が II_1 型のフォンノイマン環の組の時は、Pimsner-Popa の意味でのエントロピー $H_\tau(M \mid N)$ については、

$$H_\tau(M \mid N) = \tau(\log I_\tau^E(M \mid N)) .$$

注意 1. 関係式 (iv),(v) を用いると、指数とエントロピーに関する諸公式や諸性質が indicial derivative のそれらから直ちに導かれる。

注意 2. 指数無限やエントロピー無限のケースにおいても、有限型であれば、indicial derivative が常に意味のある指標として機能する。実際、因子環の組 $M \supset N$ に対し、$R(M,N)$ が有限型でありながら、$N' \cap M$ が無限次元となるケースがある。

参考文献

[1] Connes, A. : On the spatial theory of von Neumann algebras , J.Funct.Anal., 35(1980), 153-164.

[2] Herman, R. and Ocneanu, A. : Index theory and Galois theory for infinite index inclusions of factors, Preprint.

[3] Haagerup, U. : Operator valued weights in von Neumann algebras, I, II, J.Funct. Anal., 32(1979), 175-206; 33(1979), 339-361.

[4] Jones, V. : Index for subfactors, Invent.Math., 72(1983), 1-25.

[6] Kawakami, S. : Reduction theory on the relative entropy II, Bull.Nara Univ. Educ., 38(1989), 1-5.

[7] Kawakami, S. : Some remarks on index and entropy for von Neumann subalgebras, Proc.Jap.Acad., 65(1989), 323-325.

[8] Kosaki, H. : Extensions of Jones' theory on index to arbitrary factors, J.Funct. Anal., 66(1986), 123-140.

[9] Pimsner, M. and Popa, S. : Entropy and index for subfactors, Ann.Sci. École Norm.Sup., Sér.4, 19(1986), 57-106.